

月饼冷却过程的数学模型

王钦若¹⁾ 张平健²⁾

广东工业大学 1) 电气工程及自动化系 2) 数理系, 广州, 510090

摘要 本文建立了月饼冷却过程的数学模型, 讨论了模型的能控、能观性及其渐近性质, 根据实验数据, 用最小二乘法估计了模型中的未知参数.

关键词 数学模型; 能控性; 参数估计

中图资料法分类号 TP13; TP202.5

月饼烘烤出炉后, 温度常高达 100°C 左右, 传统作法是让其在中转库中放置 24 h 以上, 让其自然冷却, 然后密封包装, 因此, 月饼生产不仅占据大量空间, 生产周期较长, 且因月饼长时间暴露于空气中, 易受细菌污染而影响月饼的保鲜期. 如何缩短生产周期和延长月饼保鲜期, 是一个具有挑战性的难题. 目前国内外在这方面的研究尚属空白.

月饼的快速冷却过程易影响其外观色泽, 并在冷却后立即包装时会在月饼上和包装袋内产生凝露. 因此, 冷却的快慢要受控制, 并且冷却后月饼饼芯温度必须在 38°C 左右. 为达到此要求, 整个过程包括风冷、强冷、均热等几个步骤. 作为广东省科委组织的企业技术攻关项目之一, 我们研制了月饼自动冷却线系统并投入实际使用, 效果良好. 本文旨在建立月饼冷却过程的数学模型, 讨论系统的能控性、能观性以及参数估计等问题. 有关利用该模型进行控制系统的设计将在另文给出.

1 月饼风冷过程的热传导模型

月饼在冷却过程中的热传导可用如下的热传导方程^[1~3]来描述,

$$\frac{\partial}{\partial x}(K \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(K \frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(K \frac{\partial T}{\partial z}) = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1)$$

其中, T 为月饼的温度分布函数, K 为传热系数, C 为比热, ρ 为比重. 该模型对于实际应用来说, 过于复杂^[1,2], 为了简化模型, 考虑需冷却的月饼是放在铁质托盘中, 每个托盘密集放置 18 个月饼, 散热主要以月饼上下两面对流传热为主, 忽略月饼皮对传热的影响, 可作如下假设:

① 月饼为均匀介质. K 、 C 、 ρ 均取为平均值且是时不变的.

② 热量主要是通过上、下表面散发出去的, 仅沿纵轴方向存在着温度梯度(见图 1).

据假设② $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$, 模型(1)简化为:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad \alpha = \frac{K}{\rho C}. \quad (2)$$

将月饼由圆心 O 至上表皮等分成 $N+1$ 块, 并令时间间隔为 Δt , 则式

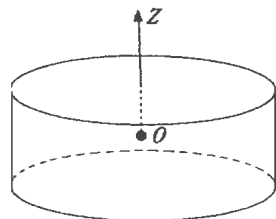


图 1 月饼热传导模型

(2)可离散化为:

$$\frac{T(0, k+1) - T(0, k)}{\Delta t} = a \frac{T(n+1, k) - 2T(n, k) - T(n-1, k)}{(\Delta z)^2}, n=1, 2, 3, \dots, N-1 \quad (3)$$

式中, $T(n, k)$ 代表第 n 块在 $k \cdot \Delta t$ 时刻的温度值. 对 $n=0$, 即中心块有:

$$\frac{T(0, k+1) - T(0, k)}{\Delta t} = \alpha \frac{2T(1) - 2T(0)}{(\Delta z)^2}. \quad (4)$$

而边界块除与内部的热交换外, 还与环境有对流传热, 因此边界的热平衡方程^[3]为:

$$V\rho C \frac{T(N, k+1) - T_N(k)}{\Delta t} = -KA \frac{T(N, k) - T(N-1, K)}{\Delta z} + h[T_e - T(N, k)]. \quad (5)$$

式中, V 为边界块的体积, A 为底面积, h 为对流传热系数. 记 $a = \frac{\alpha \cdot \Delta t}{(\Delta z)^2}$, $b = \frac{h}{V\rho C}$, 综合式(3)

~(5)得到无风时的月饼冷却方程:

$$T \begin{pmatrix} (T(0, k+1)) \\ (T(1, k+1)) \\ \vdots \\ (T(N, k+1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2a & 2a & & \\ & a & 1-2a & a \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a & 1-a-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (T(0, k)) \\ (T(1, k)) \\ \vdots \\ (T(N, k)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b \end{pmatrix} T_e. \quad (6)$$

如果考虑风的影响, 式(6)可修正为:

$$\begin{pmatrix} (T(0, k+1)) \\ (T(1, k+1)) \\ \vdots \\ (T(N, k+1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2a & 2a & & \\ & a & 1-2a & a \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a & 1-a-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (T(0, k)) \\ (T(1, k)) \\ \vdots \\ (T(N, k)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b \end{pmatrix} T_e + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ d \end{pmatrix} v. \quad (7)$$

式中, T_e 为环境温度, v 为风速. 观察方程为:

$$y(k) = T(0, k). \quad (8)$$

结论 1: 只要 a, b 非零, 系统(7), (8)是能控和能观的.

证明: 设 $e_1, e_2, \dots, e_{N+1}$ 为 R^{N+1} 中的标准正交基,

$$A = \begin{pmatrix} 1-2a & 2a & & \\ & a & 1-2a & a \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a & 1-a-b \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b \end{pmatrix}.$$

惟

简化

把褒

易验算: 散 $\vec{b} = be_{N+1}$;

$$A\vec{b} = abe_N + (1-a-b)be_{N+1};$$

$$A^2\vec{b} = a^2be_{N-1} + ab(2-3a-b)e_N + [a^2b + b(1-a-b)^2]e_{N+1};$$

∴

$$A^N\vec{b} = a^Nbe_1 + C_{N,2}e_2 + \dots + C_{N,N+1}e_{N+1}.$$

其中, $C_{N,2}$ 与 $C_{N,N+1}$ 为 a, b 的多项式, 从而, $r[\vec{b}, A\vec{b}, \dots, A^N\vec{b}] = N+1$, 故系统能控, 同理可证, 系统能观.

结论 2: 若 $0 < a < 0.5$, $b > 0$, 则系统(6)是稳定的, 且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T(n, k) = T_e, n=0, 1, \dots, N.$$

证明: 显然, 矩阵 A 的谱半径 $\rho(A) \leq \|A\|_1 = 1$, 设 λ 为 A 的特征值, $[x_1, x_2, \dots, x_{N+1}]^T$ 为相

应的特征向量,则:

$$\begin{cases} (1-2a)x_1+2ax_2=\lambda x_1 \\ ax_1+(1-2a)x_2+ax_3=\lambda x_2 \\ \vdots \\ ax_N+(1-a-b)x_{N+1}=\lambda x_{N+1} \end{cases}.$$

(9)

不妨设 i 使得 $|x_i|=\max_{1\leq j\leq N+1}|x_j|$. 由式(9)的第 i 个方程知, $|\lambda|=1$, 仅当 $|x_{i-1}|=|x_{i+1}|=|x_i|$ 时才可能成立, 再考查式(9)的第 $i-1$ 个及第 $i+1$ 个方程知, 要使 $|\lambda|=1$ 成立, 必须 $|x_{i-2}|=|x_{i-1}|=\dots=|x_{i+1}|=|x_{i+2}|$, 依次递推, 要使 $|\lambda|=1$ 成立, 只能是 $|x_1|=|x_2|=\dots=|x_{N+1}|$, 但这与式(9)的最后一个方程矛盾. 从而 $\rho(A)<1$, 即系统(7)是稳定的. 不难验算

$$\lim_{k\rightarrow\infty}T(n,k)=T_e,\quad n=0,1,2,\dots,N.$$

结论 2 表明, 即使在自然冷却的条件下, 月饼的温度最终也将趋于环境温度, 这与实际情况相符.

2 参数估计

模型式(7)中的参数 a, b, d 较难通过纯粹的机理分析确定其精确值. 本节里, 我们将运用观测数据(见图 2)获得参数 a, b, d 的估计值.

先估计参数 a 与 b , 为此, 考虑无风模型式(6). 令:

$$I(a,b)=\sum_{k=K_0}^K[aT(N-1,k)+(1-a-b)T(N,k)+bT_e-T(N,k+1)]^2$$

取 $N=2, T_e=20^{\circ}\text{C}, \Delta t=5\text{ s}, K_0=45\text{min}, K=75\text{min}$. 由最小二乘法, 可解得:

$$\overline{a}=0.33, \overline{b}=0.12.$$

下面估计参数 d , 考虑有风模型(7). 令:

$$J(d)=\sum_{k=K_0}^K[\overline{a}T(N-1,k)+(1-\overline{a}-\overline{b})T(N,k)+T_e+vd-T(N,k+1)]^2.$$

取 $N=2, T_e=20^{\circ}\text{C}, v=3\text{m/s}, \Delta t=1\text{ min}, K_0=16\text{min}, K=56\text{min}$. 令 $J'=0$, 解得 $\overline{d}=-1.08$. 为得到更精确的估计值, 我们进一步在 $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{d})$ 附近作直接搜索, 最终得到 a, b, d 的估计值为:

$$a^*=0.25, \quad b^*=0.12, \quad d^*=-1.17.$$

月饼模型计算曲线与实测曲线如图 2 所示.

3 结论

本文采用机理分析与参数估计相结合的方法建立了月饼在风冷过程中的热传导模型. 该模型是能控和能观的. 用该模型计算出来的数值与实际观测结果相差不超过 2°C .

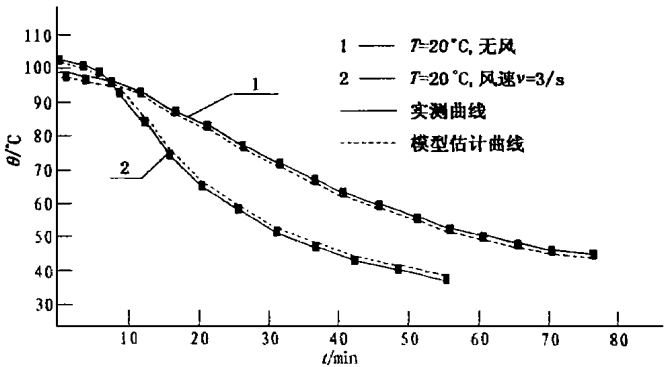


图 2 月饼冷却过程曲线

参 考 文 献

- 1 Longwell·E J·and Nachtigal·C L·,The spherical ingot model and its application to the control of the soaking pit, Report No·76,PLAIC,Purdue University,est Lafayette,Indiana,1976.1~12
- 2 吕勇哉·钢锭轧前处理过程的模型化及计算机控制策略·冶金自动化·1983,(3):1~8
- 3 吕勇哉·工业过程的模型化及计算机控制·北京:化学工业出版社,1986.93~105

The Mathematical Model of Moon Cake Cooling Process

Wang Qinruo¹⁾ Zhang Pinjian²⁾

1)Dept·of Electric Engineering & Automation

2)Dept·of Mathematics & Physics, GDUT, Guangzhou, 510090

Abstract A mathematical model of Moon—cake cooling process is proposed·The proof of the controllability, the observability and the convergency of the model are discussed·The estimation of the parameter of the model is done·

Key words model; controllability; estimation

简 讯

我校被增列为第七批博士学位授予单位

经国务院学位委员会第十六次会议审核批准广东工业大学为博士学位授予单位·首批招生专业为机械电子工程。

(研究生处)